Discutir el siguiente sistema de ecuaciones y, si es posible, resolverlo:

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ y+z&=2\\ y+2z&=a \end{aligned}$$

Resolución:

Se trata de un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas dependiente del parámetro a. (Observa que al aparecer el parámetro únicamente en los términos independientes, el ejercicio es bastante sencillo)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & a \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & a-2 \end{array}\right)$$

Como se ve, el rango de la matriz de coeficientes es máximo, 3 y el sistema es compatible determinado, independientemente el valor que tenga a. Como ya tenemos la matriz triangulada, directamente despejamos:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0\\ y+z&=2\\ z&=a-2 \end{aligned}\right\} \rightarrow z=a-2 \quad y=4-a \quad x=-y-z=-4+a-a+2=-2$$

y la solución son todos los puntos de la forma: $(-2\,,\,4-a\,,\,a-2)$