Clasificar el siguiente sistema de ecuaciones y, caso de ser posible, resolverlo:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Resolución:

Empezaremos discutiendo el sistema empleando el Teorema de Rouché-Fröbenius. La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$.

Vamos a calcular los rangos

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F3=F3-2F1]{F2=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Está claro que el $r(A) = r(A^*) = 2 < 3$, luego estamos ante un sistema compatible, aunque como no es máximo es compatible indeterminado. Resolvemos

$$\left.\begin{array}{l} x - y + 3z = 3 \\ 3y - 4z = -1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x - y = 3 - 3z \\ 3y = 4z - 1 \end{array}\right\} \to y = \frac{4z-1}{3} \to x = y + 3 - 3z = \frac{8-5z}{3}$$

y de esta forma, la solución son todos los puntos de la forma:

$$\left(\frac{8-5\mu}{3}, \frac{4\mu-1}{3}, \mu\right)$$