Discutir el siguiente sistema y resolver, si es posible, aplicando el método de la matriz inversa

$$\begin{aligned} x-2y-3z&=3\\ 2x-y-4z&=7\\ 3x-3y-5z&=8 \end{aligned}$$

Resolución:

Vemos primero si el sistema es compatible. Para ello estudiamos el rango de la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & -4\\ 3 & -3 & -5\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & -4\\ 3 & -3 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow[F3=F3-3F1]{F2=F2-2F1}\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{F3=F3-F2}\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 3, que es **máximo** y, evidentemente, coincide con el de la matriz ampliada, por lo que estamos ante un *sistema compatible determinado*. Existe una única solución que nos piden calcular por el método de la matriz inversa.

Recordemos que es $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot[Adj(A)]^T$. $Adj(A)=\begin{pmatrix}-7 & -2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 5 & -2 & 3\end{pmatrix}$ de donde trasponiendo $[Adj(A)]^T=\begin{pmatrix}-7 & -1 & 5\\ -2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}$

Calculamos utilizando la regla de Sarrus el determinanate de la matriz A $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & -4\\ 3 & -3 & -5\end{vmatrix}=5+18+24-9-12-20=6$. Con este resultado, $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-7 & -1 & 5\\ -2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}$ y podemos plantear que $X=A^{-1}\cdot B$, siendo $B=\begin{pmatrix}3\\ 7\\ 8\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-7 & -1 & 5\\ -2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 7\\ 8\end{pmatrix}\rightarrow \begin{aligned} x&=\frac{1}{6}(-21-7+40)=2\\ y&=\frac{1}{6}(-6+28-16)=1\\ z&=\frac{1}{6}(-9-21+24)=-1\end{aligned}$$