Estudiar la posición relativa de los siguientes planos:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+z=0 \\ 3x+6y+z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{array}\right\}$$

*Resolución*

No hay ninguna ecuación que sea proporcional a otra, con lo que podemos concluir que no hay ningún plano paralelo a otro. Planteamos la matriz del sistema y la matriz ampliada y aplicamos el método de Gauss para resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3-2\cdot F1]{F2=F2-3\cdot F1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2=F2-3\cdot F3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cambio la 2ª por la 3ª fila y obtengo $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. El rango de esta matriz es 3 y el de la matriz ampliada también y, además el rango es máximo, con lo que estamos ante un sistema compatible determinado, lo que significa que tiene una única solución o, lo que es lo mismo, que los tres planos se cortan en un solo punto. Para averiguar dicho punto resolvemos el sistema a partir de la matriz triangulada última:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y+z=0 \\ 5y-z=1 \\ z=0 \end{array}\right\} \rightarrow y=\frac{1}{5},\quad x=\frac{3}{5}$$

El punto buscado es $\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5},0\right)$