EL INFINITO Y LOS LÍMITES

Aunque suene parecido, no son la misma cosa los límites infinitos que los límites en el infinito. Veamos quién es quién.

1.- Límites infinitos (es la función la que se va a $\pm\infty$)

Diremos que el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to a$ es $+\infty$ cuando fijado un número real *K* positivo (*K*>0), se verifica que $f(x) > K$ para todos los valores de *x* cercanos a *a*. Es decir, por grande que sea el número *K* que yo quiera imaginar, la función, en las proximidades de *a*, siempre será mayor que ese número.

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \Re^{+} \ \exists \delta > 0 \ \ tal\ que\ si\ \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

De igual forma, diremos que el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to a$ es $-\infty$ cuando fijado un número real negativo *N*, se verifica que $f(x) < N$ para valores de x cercanos a *a*.

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \Re^{-} \ \exists \delta > 0 \ \ tal\ que\ si\ \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < K$$

2.- Límites en el infinito (es la variable x la que se va a $\pm\infty$)

Del mismo modo que hemos hecho en el apartado anterior, aplicamos la definición de límite. Está claro que el límite de una función, si existe, puede ser un número real o bien $\pm\infty$. En primer lugar cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists M(\varepsilon) > 0 \ \ tal\ que\ si\ \ x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Decimos que la función tiene por límite L cuando está tan próxima a ese valor como nosotros queramos. Decir que está próxima es lo mismo que decir que la diferencia (ε) entre el valor de la función y ese punto es tan pequeño como queramos imaginar.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \Re^{+} \ \exists M(K) > 0 \ \ tal\ que\ si\ \ x > M \Rightarrow f(x) > K$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N \in \Re^{-} \ \exists M(N) > 0 \ \ tal\ que\ si\ \ x > M \Rightarrow f(x) < N$$

Y finalmente cuando $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M(\varepsilon) < 0\ \ tal\ que\ si\ \ x < M \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \Re^{+}\ \exists M(K) < 0\ \ tal\ que\ si\ \ x < M \Rightarrow f(x) > K$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N \in \Re^{-}\ \exists M(N) < 0\ \ tal\ que\ si\ \ x < M \Rightarrow f(x) < N$$

Algunos teoremas importantes y de aplicación inmediata en el cálculo de límites:

1.- Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = L_2$, se verifica

- $\lim_{x\to\infty}\left(f(x) \pm g(x)\right) = L_1 \pm L_2$
- $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = L_1 \cdot L_2$
- Siempre y cuando $L_2 \neq 0$, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$

Y las mismas propiedades pueden aplicarse cuando $x \to -\infty$

2.- El límite del cociente de dos funciones polinómicas del mismo grado cuando $x \to \pm\infty$ es el cociente de los coeficientes de mayor grado.

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2-3x+1}{4x^3-2x^2+5x-8} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}+\frac{8}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{4-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{8}{x^3}} = \frac{5}{4}$$

3.- El límite del cociente de dos funciones polinómicas en las que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, cuando $x \to \pm\infty$ es 0.

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+5x^2-2x+2}{7x^4-2x^3+5x-7} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^3}{x^4}+\frac{5x^2}{x^4}-\frac{2x}{x^4}+\frac{2}{x^4}}{\frac{7x^4}{x^4}-\frac{2x^3}{x^4}+\frac{5x}{x^4}-\frac{7}{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^4}}{7-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}-\frac{7}{x^4}} = \frac{0}{7} = 0$$

4.- Si *f(x)* y *g(x)* son dos funciones polinómicas,

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ $\qquad$ $g(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + ... + b_0$

y *grado g(x)* < *grado f(x)*, entonces se verifica que

- $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty & si \quad a_n > 0 \\ -\infty & si \quad a_n < 0 \end{cases}$

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & si \quad a_n > 0 \\ \infty & si \quad a_n < 0 \end{cases}$

Ejemplos:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{-4x^3 + 3x - 1}{2x^2 + 1} = \infty$, ya que $x \to -\infty$ y -4<0

$\lim_{x \to \infty} \frac{-3x^4 + 5}{x + 2} = -\infty$, ya que $x \to \infty$ y -3<0