SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Estudiar un Sistema de Ecuaciones Lineales (S.E.L.) es responder a las preguntas: ¿tiene solución?. y si es así, , ¿cuántas tiene y cuáles son?. A la vista de estas preguntas y de la misma manera que hacíamos en los sistemas de ecuaciones sencillos de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, estudiar un sistema de ecuaciones consta de 2 pasos:

1º.- ***Discutir*** el sistema, es decir, averiguar si tiene solución y si esta es única o no lo es (compatibilidad).

2º.- ***Resolver*** el sistema calculando la solución o soluciones.

El Teorema de ***Rouché-Fröbenius*** y el uso de matrices y determinantes serán nuestras herramientas a la hora de discutir la compatibilidad de un s.e.l.

Sistemas de ecuaciones lineales

Tal como vimos cuando estudiamos los sistemas 2x2, muchas situaciones de la vida real nos llevan a resolver de forma simultánea varias ecuaciones lineales para hallar las soluciones comunes a todas ellas. Especial aplicación tienen los s.e.l. a la geometría, donde las ecuaciones representan rectas y planos y resolver el s.e.l. equivale a averiguar las posiciones relativas de estos elementos en el plano y en el espacio.

Una *ecuación lineal* de "n" variables es una expresión del tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

Donde los a_i son los coeficientes de la ecuación, b es el término independiente y los x_i son las incógnitas

Un *sistema de ecuaciones lineales* es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Tal como lo hemos escrito, el sistema de ecuaciones tiene m ecuaciones y n incógnitas. Los elementos a_{ij} son los coeficientes del sistema (números reales), b_i son los términos independientes (números reales también) y finalmente, x_i son las incógnitas (variables del sistema).

La solución de este s.e.l., caso de existir, será una n-tupla ordenada $(s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots, s_n)$ de números reales, que verifican a la vez las m ecuaciones del sistema (sustituyendo cada una de las x_i por cada una de las s_i).

Utilizando *notación matricial*, podemos escribir nuestro s.e.l. de la siguiente forma:

$$A \cdot X = B$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots. & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots. & a_{3n} \\ & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots. & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de coeficientes}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de incógnitas}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de términos indep.}}$$

Observa que:

- La matriz del sistema A está compuesta por m filas y n columnas (decimos que tiene orden o dimensión mxn)
- La matriz de incógnitas X es una matriz columna de n filas.
- La matriz de términos independientes B es una matriz columna de m filas
- La matriz ampliada A^* del sistema es la compuesta por la matriz de coeficientes a la que hemos añadido la columna formada por los términos independientes

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Un s.e.l. puede ser *compatible* (tiene solución) o *incompatible* si no la tiene. En caso de tener solución, si tiene sólo una se llama *compatible determinado* y si tiene infinitas soluciones se llama *compatible indeterminado*.

Si los términos independientes del s.e.l. son todos nulos, el sistema se dice *homogéneo* y si no todos los términos independientes son nulos, se llama *no homogéneo*.

Teorema de Rouché-Fröbenius

Un s.e.l. es compatible si y sólo si (condición necesaria y suficiente) el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada son iguales. Si los rangos son distintos, el sistema es incompatible.

$$rg(A)=rg(A^*)=p \Leftrightarrow Sistema\ compatible \begin{cases} n=p\ Compatible\ Determinado \\ n>p\ Compatible\ Indeterminado \end{cases}$$

$$rg(A)\neq rg(A^*)\ Incompatible$$

En el caso particular de los sistemas homogéneos, siempre se da la situación de ser $rg(A)=rg(A^*)$ ya que la columna de términos independientes es la formada por ceros y, por tanto, estos sistemas homogéneos siempre tienen solución, pues al menos la solución trivial (0,0,0, …. ,0) siempre existe. En la práctica se suele decir que un sistema homogéneo tiene solución cuando ésta es distinta de la trivial. Se verifica también que si $(s_1,s_2,s_3,....,s_n)$ es solución del s.e.l., también lo es cualquier otra solución proporcional a ella, es decir, $(k\cdot s_1, k\cdot s_2, k\cdot s_3,....,k\cdot s_n)$, siendo k un número real cualquiera.

Vamos a aplicar el Teorema de Rouché-Fröbenius a un ejemplo:

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones:

$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=-1 \\ x+2y+3z=2 \end{array}\right\}$ La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$. Estudiaremos el rango de ambas a partir de A^*

$$rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) = rg\underset{\substack{F2=F1*2-F2 \\ F3=F1-F3}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)} = rg\underset{Cambio\ 2^a\ por\ 3^a}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \end{array}\right)} = rg\underset{F3=F2*3+F3}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right)}$$

Planteamos ahora para la discusión el mismo cuadro del principio de página:

$\left.\begin{array}{l} rgA=3 \\ rgA^*=3 \end{array}\right\}$ Ambos rangos son iguales y, por tanto, el sistema es compatible.

Como además el rango es igual al número de incógnitas, es decir, $p = 3$, el sistema es compatible determinado. Podría resolverse y tendría una única solución.

Ya sabemos cuándo tiene solución. Ahora llega el momento de resolver el s.e.l., es decir, de calcular todas y cada una de sus soluciones

Métodos de resolución de s.e.l.

- Método de Gauss (reducción)
- Método de Gauss-Jordan (eliminación)
- Método de Cramer
- Matriz inversa

Método de Gauss

Básicamente este método consiste en triangular la matriz de coeficientes, de forma que la última ecuación contenga únicamente una incógnita, la penúltima ecuación 2 incógnitas y así sucesivamente hasta llegar a la primera ecuación, que contendrá las n incógnitas. Como la última ecuación sólo tiene una incógnita, la despejamos y la sustituimos en la penúltima, de la que también despajamos…. y así sucesivamente hasta llegar a la primera. Lo vemos con nuestro ejemplo anterior.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{array}\right\}$$

Ya lo hemos discutido previamente y sabemos que es compatible determinado, con lo que aplicando el método de Gauss y operando de la misma forma que hemos hecho para calcular el rango:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right)$$

Ya tenemos triangulada la matriz y podemos escribir el sistema así:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ y+2z=0 \\ 5z=-5 \end{array}\right\}$$ Despejo z en la última $z=-1$ y sustituyo en la 2ª ecuación para despejar la y. $y-2=0 \rightarrow y=2$. Finalmente sustituyo y y z en la 1ª ecuación para despejar la x. $x+2-1=2 \rightarrow x=1$

Como ves, cuando el sistema es compatible determinado la aplicación del método de Gauss nos proporciona las soluciones del s.e.l. de una forma sencilla y ordenada. ¿Qué ocurriría si el sistema fuese compatible indeterminado?. Veámoslo con otro ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y-z=8 \\ x-y+2z=-1 \\ 3x+7y-4z=17 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -4 & 17 \end{array}\right) \rightarrow \underset{Cambio\ 1^a\ por\ 2^a\ fila}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 8 \\ 3 & 7 & -4 & 17 \end{array}\right)} \rightarrow \underset{\substack{F2=F1*2-F2 \\ F3=F1*3-F3}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & -10 & 10 & -20 \end{array}\right)} \rightarrow \underset{\substack{F2=-F2/5 \\ F3=-F3/10}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \underset{F3=F3-F2}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$ Puedo plantear las ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x-y+2z=-1 \\ y-z=2 \end{array}\right\}$ Hacemos $\boxed{z=\lambda}$

y entonces $\boxed{y=2+\lambda} \rightarrow x-(2+\lambda)+2\lambda=-1 \rightarrow \boxed{x=1-\lambda}$

Método de Gauss-Jordan

Es una variante del método de Gauss. Se trata de diagonalizar la matriz, con lo que invertimos más tiempo en hacerlo al principio pero, al final, los resultados se alcanzan más fácilmente. Retomando el ejemplo anterior en el caso compatible determinado, continuamos diagonalizando la matriz para dejar sólo la diagonal principal de la misma y despejar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \ldots\ldots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \underset{F3=F3/5}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)} \rightarrow \underset{\substack{F2=-F3*2+F2 \\ F1=F1-F3}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)} \rightarrow \underset{F1=F1-F2}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)}$$

Ahora simplemente tenemos que despejar cada una de las incógnitas en sus correspondientes ecuaciones: $x = 1$ $\quad y = 2$ $\quad z = -1$

Método de Cramer (empleando determinantes)

Este método sólo es aplicable cuando el sistema que estamos resolviendo es compatible determinado (necesitamos que el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de cero y que el número de ecuaciones y el de incógnitas sea igual).

El valor de cada una de las incógnitas x_i se obtiene como un cociente en el que el denominador es el determinante de la matriz de coeficientes y el numerador es el determinante que resulta de sustituir la columna i-ésima del determinante anterior por la columna de términos independientes. Podemos escribirlo así: $xi = \dfrac{|A_{x_i}|}{|A|}$.

Lo vemos en nuestro ejemplo de sistema compatible determinado.

Resolver el siguiente s.e.l. por el método de Cramer

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=-1 \\ x+2y+3z=2 \end{array}\right\}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ aplicando la Regla de Sarrus

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-3+4+1)-(-1+2+6) = 2-7 = -5$$

Para calcular la incógnita x, sustituimos la 1ª columna del determinante anterior por la columna de términos independientes y dividimos. Haremos lo mismo para y y para z Así:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-6-2+2)-(-2+4-3)}{-5} = \frac{-6+1}{-5} = 1$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-3+4+2)-(-1+2+12)}{-5} = \frac{3-13}{-5} = 2$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-2+8-1)-(-2-2+4)}{-5} = \frac{5}{-5} = -1$$

Método de la matriz inversa

Para aplicar este método también necesitamos que el sistema sea compatible determinado (mismo número de ecuaciones que incógnitas y además el $|A| \neq 0$). Como el s.e.l. se escribía como $A \cdot X = B$, tendremos que $X = A^{-1} \cdot B$

Recordemos que $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^T$.

Aplicar el método de la matriz inversa para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{array}\right\}$$

Ya sabemos que $|A| = -5$. La matriz adjunta es la que resulta de sustituir cada uno de los elementos a_{ij} por sus adjuntos (recuerda la regla de los signos). Por tanto, si la matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, la matriz adjunta será $Adj(A) = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y la traspuesta será: $[Adj(A)]^T = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Finalmente, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^T = \dfrac{1}{-5} \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & -2/5 \\ 1 & -2/5 & -1/5 \\ -1 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & -2/5 \\ 1 & -2/5 & -1/5 \\ -1 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 - \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5} = 1 \\ y = 2 + \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5} = 2 \\ z = -2 - \dfrac{1}{5} + \dfrac{6}{5} = -1 \end{array}\right\}$$