CÁLCULO DE LÍMITES

En el caso de que la función sea de las llamadas “elementales”, el límite de la función en un punto se calcula normalmente sustituyendo ese punto en la función.

Polinomios

Si la función es un polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, calcularemos el $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ sustituyendo el valor de *x* por *b* en el polinomio, así

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_1 b + a_0$$

Ejemplos:

a) Calcular el límite de la función $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ en el punto $x_0 = 3$

Aplicamos la regla anterior para obtener:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 5 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 145$$

b) Calcular el límite de la función $f(x) = x^2 - 9$ en $x_0 = -3$

De igual manera tendremos que $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3) = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$

Funciones racionales

Las funciones racionales son el cociente de funciones polinómicas, por tanto tienen la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

siendo *p(x)* y *q(x)* funciones polinómicas. Para calcular el límite de esta función en el punto x_0 distinguiremos *2 casos*:

a) El punto x_0 NO anula al denominador, es decir, $q(x_0) \neq 0$, en este caso y utilizando las propiedades de los límites

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} p(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = f(x_0)$$

Ejemplo

$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-5x+4}{3x^3-2x+5} = \frac{1}{6}$, ya que *x=1* no es raíz del denominador

b) El punto x_0 sí anula al denominador (es una raíz) $q(x_0)=0$. En este caso podemos tener 2 situaciones distintas:

b1) Que el punto x_0 también anule al numerador $p(x_0)=0$ (es una *indeterminación del tipo* $0/0$ que hay resolver para calcular el límite)

Si el punto x_0 anula al numerador, esto quiere decir que ese punto también es raíz del mismo. Por ser una raíz de ambos, podremos descomponer esos polinomios de la siguiente forma (utilizando Ruffini por ejemplo)

$p(x)=(x-x_0)p_1(x)$ $\qquad$ $q(x)=(x-x_0)q_1(x)$, por lo que

$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-x_0)p_1(x)}{(x-x_0)q_1(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$ y de esta forma $\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$

Si se volviese a dar la misma situación, procederíamos de igual forma.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x} = 2$$

El punto x=1 es raíz del numerador y del denominador	Descomponemos los polinomios en producto de factores	Simplificamos y calculamos el límite

b2) Que el punto x_0 **NO** anule al numerador $p(x_0)\neq 0$

En este caso la función no tiene límite en los números reales $\Re$

<u>Funciones con radicales</u>

Se verifica la siguiente igualdad $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$. Si se nos presenta una indeterminación, en estos casos suele desaparecer utilizando el conjugado. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Calcular el límite de la función $g(x)=\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$ para $x=0$. En este caso no podemos aplicar que el límite del cociente es el cociente de los límites (teorema del cociente) porque esto nos conduce a una expresión del tipo 0/0. Procedemos a multiplicar y dividir por el conjugado del numerador, con lo que

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{3+x}-\sqrt{3})(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}{\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)x}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Ejemplo 2

Calcular el límite de la función $h(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$ cuando x tiende a *0*

De la misma forma que en el ejemplo anterior, tampoco podemos aplicar el teorema del cociente de límites porque también es de la forma 0/0, entonces:

$$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)\left(1-\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{1-x}\right)=2$$

El número e

Se verifica que $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Ejemplo 1

Calcular el límite de la función $h(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5x}$ cuando x tiende a ∞.

Se trata de poner este límite de la forma del número e, así

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{5}=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{5}=e^{5}$$