LA RECTA EN EL PLANO

Una recta en el plano queda determinada por un punto y por su vector de dirección. Si el punto por el que pasa la recta es $A(x_1, y_1)$ y un vector de dirección de la recta es $\vec{v} = (v_1, v_2)$, cualquier punto $X(x, y)$ de dicha recta tendrá la forma:

$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$ *(ecuación **vectorial** de la recta)*

siendo $\vec{x}$ el vector de posición del punto X y $\vec{a}$ el del punto A. De esta ecuación vectorial se deducen la siguientes ecuaciones:

$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + t \cdot v_1 \\ y = y_1 + t \cdot v_2 \end{array}\right\}$, llamadas *ecuaciones **paramétricas***.

Despejando *t* en ambas ecuaciones e igualando los resultados tenemos:

$\dfrac{x - x_1}{v_1} = \dfrac{y - y_1}{v_2}$, llamada ***ecuación continua*** .

Si multiplicamos en cruz $v_2 \cdot x - x_1 v_2 = v_1 \cdot y - y_1 v_1$ y ahora agrupamos términos:

$$v_2 \cdot x - v_1 y + \left(y_1 v_1 - x_1 v_2\right) = 0$$

lo que da lugar a la llamada

*Ecuación **general*** de la recta $Ax + By + C = 0$

Observando la fórmula anterior, es fácil deducir que dada la ecuación de una recta en forma explícita, podemos tomar como vector director el $\vec{v} = (-B, A)$ y, a partir de aquí, determinar las ecuaciones vectorial, paramétrica y continua.

Ejemplo:

Dada la recta $3x - 2y + 5 = 0$, *el vector de dirección es* $\vec{v} = (2,3)$. *Haciendo* $x = 1$ *en la ecuación dada, obtenemos que* $3 \cdot 1 - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = 4$, *y con ello las ecuaciones paramétricas de la recta son:*

$$x = 1 + 2t$$
$$y = 4 + 3t$$

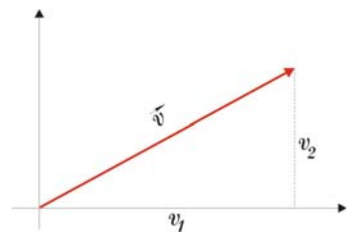
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Una recta en el plano afín queda determinada por dos puntos, A y B, distintos. Si las coordenadas de esos puntos son $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$, la ecuación de la recta que pasa por ellos es:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\text{, siempre que } x_2 \neq x_1 \quad y_2 \neq y_1}$$

Pendiente de una recta

Dada una recta r cuyo vector director sea $\vec{v}=(v_1, v_2)$, $v_1 \neq 0$,llamaremos pendiente de la recta r al número $m=\frac{v_2}{v_1}$. Si te fijas en la figura de la derecha, la pendiente coincide con la tangente del ángulo que forma la recta con el eje *OX*.



La ecuación de la recta en forma continua $\frac{x-x_1}{v_1}=\frac{y-y_1}{v_2}$ podemos escribirla también de esta forma: $y-y_1=\frac{v_2}{v_1}(x-x_1)$, y, teniendo en cuenta que $m=\frac{v_2}{v_1}$, llegamos a la ecuación $\boxed{y-y_1=m\cdot(x-x_1)}$ que es conocida como la ecuación de la recta en forma *punto-pendiente.*

Ejemplo:

Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3,2) y tiene pendiente m=-4.

Aplicando directamente la ecuación de la recta en forma punto-pendiente:

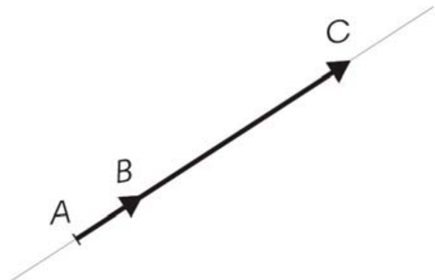
$y-2=-4(x-3)$ *y haciendo los cálculos:* $4x+y-14=0$

Algunas definiciones más.

- Diremos que un punto <u>P pertenece a una recta r</u>, o que la recta r pasa por el punto P, cuando $P \in r$. Si $P(x_1, y_1)$ pertenece a la recta r de ecuación

$Ax + By + C = 0$, las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la recta, es decir, $\boxed{P \in r \quad \Leftrightarrow \quad Ax_1 + By_1 + C = 0}$

- Diremos que tres puntos <u>A, B y C están alineados</u> cuando pertenecen a la misma recta. Observando la figura, si los puntos A, B y C están alineados, los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ tienen la misma dirección. En la práctica emplearemos el siguiente criterio: *Tres puntos A, B y C están alineados si los vectores* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{AC}$ *son proporcionales.*



Ejemplo:

¿Están alineados los puntos A(0,0), B(2,2) y C(3,5)?

Construimos los vectores $\overrightarrow{AB} = (2,2) - (0,0) = (2,2)$ *y* $\overrightarrow{AC} = (3,5) - (0,0) = (3,5)$ *que claramente no son proporcionales, ya que no hay ningún número real* ***t*** *que verifique (3,5)=t(2,2). Por tanto concluimos que los puntos dados no están alineados.*

- Si dos rectas, *r* y *s*, del plano afín son <u>secantes</u>, su intersección es un punto:

$$\boxed{r \text{ y } s \text{ son secantes} \Leftrightarrow r \cap s = \{P\}}$$

Calcular la intersección de dos rectas es resolver el sistema de ecuaciones que forman ambas.

- Dos rectas del plano afín son <u>paralelas</u> cuando no tienen ningún punto en común.

$$\boxed{r \parallel s \text{ cuando } r \cap s = \varnothing}$$

Se verifica que dos rectas son <u>paralelas cuando tienen la misma pendiente</u>.

Dos rectas del plano afín son <u>perpendiculares</u> cuando el producto de sus pendientes es igual a -1.

$$\boxed{r \perp s \text{ cuando } m_r \cdot m_s = -1}$$