

Discutir el siguiente sistema y resolver, si es posible, aplicando el método de la matriz inversa

$$\begin{aligned}x - 2y - 3z &= 3 \\2x - y - 4z &= 7 \\3x - 3y - 5z &= 8\end{aligned}$$

Resolución:

Vemos primero si el sistema es compatible. Para ello estudiamos el rango de la

matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 3F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 3, que es **máximo** y, evidentemente, coincide con el de la matriz ampliada, por lo que estamos ante un *sistema compatible determinado*. Existe una única solución que nos piden calcular por el método de la matriz inversa.

Recordemos que es $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^T$. $Adj(A) = \begin{pmatrix} -7 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ de donde

trasponiendo $[Adj(A)]^T = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos utilizando la regla de Sarrus el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 5 + 18 + 24 - 9 - 12 - 20 = 6. \quad \text{Con este resultado,}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y podemos plantear que } X = A^{-1} \cdot B, \text{ siendo } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned}x &= \frac{1}{6}(-21 - 7 + 40) = 2 \\y &= \frac{1}{6}(-6 + 28 - 16) = 1 \\z &= \frac{1}{6}(-9 - 21 + 24) = -1\end{aligned}$$