

Dados los puntos $A(0,0)$, $B(-1,0)$ y $C(2,3)$, calcula la ecuación de la parábola que pasa por ellos. Determina también su vértice, su eje, los cortes con los ejes coordenados y represéntala gráficamente.

Resolución:

La expresión general de una parábola es $y = ax^2 + bx + c$. Debemos averiguar pues tres incógnitas para determinar exactamente la parábola. Como tenemos tres datos, planteamos un sistema de ecuaciones. Así:

Como el punto $A(0,0)$ es de la parábola, cumplirá su ecuación

$$0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \rightarrow c = 0$$

Lo mismo haremos con los puntos B y C

$$0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 0 \text{ con el punto B}$$

$$3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 0 \text{ con el punto C}$$

y resolver el sistema que hemos planteado

$$\left. \begin{array}{l} a - b = 0 \\ 4a + 2b = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a = b \\ 4a + 2a = 3 \end{array} \right\} \rightarrow 6a = 3 \rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ y como } a = b \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la parábola es pues $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

Vértice de la parábola:

Si recordamos la fórmula que nos da este punto $V\left(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$, no tengo mas que

sustituir los valores de $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 0$ en la fórmula y

$$\text{calcularlo } V = \left(\frac{-\frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}}, 0 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4 \cdot \frac{1}{2}} \right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{8} \right)$$

Si no recordamos esta fórmula, aplicamos el método de “completar cuadrados”, así:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(x^2 + x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + p = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} + p, \text{ de donde,}$$

comparando esta expresión con la expresión de la parábola, se deduce que

$p + \frac{1}{8} = 0 \rightarrow p = -\frac{1}{8}$ y con ello la ecuación de la parábola puedo escribirla así

$$y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8}, \text{ y el vértice está en el punto } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8} \right)$$

El eje de la parábola es la recta $x = -\frac{1}{2}$

Cortes con los ejes:

Con el eje X: hay que hacer $y = 0 \rightarrow 0 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ y despejar la x

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = 0 \rightarrow \frac{1}{2}(x^2 + x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}x(x + 1) = 0$, de donde se deduce que los puntos de corte son $x = 0$ y $x = -1$. (Podrías haberlo hecho también aplicando directamente la fórmula para resolver ecuaciones de 2º grado)

Con el eje Y: hay que hacer $x = 0$ y nos sale el punto $(0,0)$ que ya teníamos.

Una vez que tenemos todos los elementos que nos pedían, vamos a representar gráficamente la parábola. Para ello daremos unos cuantos valores alrededor del vértice, ya que la parábola es simétrica respecto a su eje:

x	y
-1	0
0	0
-2	1
1	1
-3	3
2	3

