EL INFINITO Y LOS LÍMITES

Aunque suene parecido, no son la misma cosa los límites infinitos que los límites en el infinito. Veamos quién es quién.

1.- Límites infinitos (es la función la que se va a $\pm\infty$)

Diremos que el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to a$ es $+\infty$ cuando fijado un número real *K* positivo (*K*>0), se verifica que $f(x) > K$ para todos los valores de *x* cercanos a *a*. Es decir, por grande que sea el número *K* que yo quiera imaginar, la función, en las proximidades de *a*, siempre será mayor que ese número.

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \Re^{+}\ \exists \delta > 0\ \ tal\ que\ si\ \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

De igual forma, diremos que el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to a$ es $-\infty$ cuando fijado un número real negativo *N*, se verifica que $f(x) < N$ para valores de x cercanos a *a*.

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \Re^{-}\ \exists \delta > 0\ \ tal\ que\ si\ \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < K$$

2.- Límites en el infinito (es la variable x la que se va a $\pm\infty$)

Del mismo modo que hemos hecho en el apartado anterior, aplicamos la definición de límite. Está claro que el límite de una función, si existe, puede ser un número real o bien $\pm\infty$. En primer lugar cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M(\varepsilon) > 0\ \ tal\ que\ si\ \ x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Decimos que la función tiene por límite L cuando está tan próxima a ese valor como nosotros queramos. Decir que está próxima es lo mismo que decir que la diferencia (ε) entre el valor de la función y ese punto es tan pequeño como queramos imaginar.

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \Re^{+}\ \exists M(K) > 0\ \ tal\ que\ si\ \ x > M \Rightarrow f(x) > K$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N \in \Re^{-}\ \exists M(N) > 0\ \ tal\ que\ si\ \ x > M \Rightarrow f(x) < N$$

Y finalmente cuando $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M(\varepsilon) < 0\ \ tal\ \ que\ \ si\ \ x < M \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \Re^{+}\ \exists M(K) < 0\ \ tal\ \ que\ \ si\ \ x < M \Rightarrow f(x) > K$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N \in \Re^{-}\ \exists M(N) < 0\ \ tal\ \ que\ \ si\ \ x < M \Rightarrow f(x) < N$$