

## EL INFINITO Y LOS LÍMITES

Aunque suene parecido, no son la misma cosa los límites infinitos que los límites en el infinito. Veamos quién es quién.

### 1.- Límites infinitos (es la función la que se va a $\pm\infty$ )

Diremos que el límite de la función  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow a$  es  $+\infty$  cuando fijado un número real  $K$  positivo ( $K > 0$ ), se verifica que  $f(x) > K$  para todos los valores de  $x$  cercanos a  $a$ . Es decir, por grande que sea el número  $K$  que yo quiera imaginar, la función, en las proximidades de  $a$ , siempre será mayor que ese número.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathfrak{R}^+ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

De igual forma, diremos que el límite de la función  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow a$  es  $-\infty$  cuando fijado un número real negativo  $N$ , se verifica que  $f(x) < N$  para valores de  $x$  cercanos a  $a$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathfrak{R}^- \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < K$$

### 2.- Límites en el infinito (es la variable $x$ la que se va a $\pm\infty$ )

Del mismo modo que hemos hecho en el apartado anterior, aplicamos la definición de límite. Está claro que el límite de una función, si existe, puede ser un número real o bien  $\pm\infty$ . En primer lugar cuando  $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) > 0 \text{ tal que si } x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Decimos que la función tiene por límite  $L$  cuando está tan próxima a ese valor como nosotros queramos. Decir que está próxima es lo mismo que decir que la diferencia ( $\varepsilon$ ) entre el valor de la función y ese punto es tan pequeño como queramos imaginar.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathfrak{R}^+ \exists M(K) > 0 \text{ tal que si } x > M \Rightarrow f(x) > K$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N \in \mathfrak{R}^- \exists M(N) > 0 \text{ tal que si } x > M \Rightarrow f(x) < N$$

Y finalmente cuando  $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) < 0 \text{ tal que si } x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathfrak{R}^+ \exists M(K) < 0 \text{ tal que si } x < M \Rightarrow f(x) > K$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N \in \mathfrak{R}^- \exists M(N) < 0 \text{ tal que si } x < M \Rightarrow f(x) < N$$

Algunos teoremas importantes y de aplicación inmediata en el cálculo de límites:

1.- Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_1$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L_2$ , se verifica

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$$

$$\triangleright \text{Siempre y cuando } L_2 \neq 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Y las mismas propiedades pueden aplicarse cuando  $x \rightarrow -\infty$

2.- El límite del cociente de dos funciones polinómicas del mismo grado cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  es el cociente de los coeficientes de mayor grado.

*Ejemplo*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{4x^3 - 2x^2 + 5x - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{5x}{x^3} + \frac{8}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{4 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{8}{x^3}} = \frac{5}{4}$$

3.- El límite del cociente de dos funciones polinómicas en las que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  es 0.

*Ejemplo*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 5x^2 - 2x + 2}{7x^4 - 2x^3 + 5x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^3}{x^4} + \frac{5x^2}{x^4} - \frac{2x}{x^4} + \frac{2}{x^4}}{\frac{7x^4}{x^4} - \frac{2x^3}{x^4} + \frac{5x}{x^4} - \frac{7}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4}}{7 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{7}{x^4}} = \frac{0}{7} = 0$$

4.- Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son dos funciones polinómicas,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad g(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_0$$

y  $\text{grado } g(x) < \text{grado } f(x)$ , entonces se verifica que

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_n > 0 \\ \infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

*Ejemplos:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3 + 3x - 1}{2x^2 + 1} = \infty, \text{ ya que } x \rightarrow -\infty \text{ y } -4 < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + 5}{x + 2} = -\infty, \text{ ya que } x \rightarrow \infty \text{ y } -3 < 0$$