EJERCICIO 3

Resuelve la siguiente inecuación $\dfrac{x(2x+1)}{x^2+2x-8} \leq 0$.

Resolución:

Para resolver este tipo de inecuaciones procederemos de la siguiente manera:

1º.- Calcularemos las raices del numerador y del denominador. Recuerda que una RAIZ de f(x) es un número que anula a f(x), es decir, f(x)=0. En nuestro caso

Raíces del Numerador

$x(2x+1)=0$. Para que este producto sea igual a 0, deberá ser 0 alguno de los dos factores o ambos, así:

$$x = 0$$

$$(2x+1)=0 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Raíces del denominador

Se trata de un polinomio de 2º grado. Tendremos que resolver la ecuación $x^2+2x-8=0$ y para ello utilizaremos la fórmula $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. En nuestro caso, $a=1 \quad b=2 \quad c=-8$.

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm6}{2}=\begin{cases}\dfrac{-2+6}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\[2ex]\dfrac{-2-6}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4\end{cases}$$

Una vez que hemos calculado todas las raíces, las disponemos en orden, de menor a mayor, -4, -1/2, 0 y 2, en una tabla de la siguiente forma:

	-∞	-4	-1/2	0	2	+∞
x+4						
$2(x+\frac{1}{2})$						
x						
x+2						
TOTAL						

Se trata ahora de ir viendo, dando valores, qué signo toma cada uno de los factores en cada uno de los intervalos definidos por los valores de las raíces.

El factor (x+4), entre -∞ y -4 es negativo. Basta con dar un valor que esté en ese intervalo para comprobarlo. Por ejemplo, $-9 \in (-\infty, -4)$ y $-9+4 = -5$, que es negativo. De igual forma procedemos en todos los demás hasta completar la tabla con los signos en cada una de las casillas. Una vez hecho esto, tan sólo nos resta utilizar la regla de los signos para calcular el signo que tendrá la expresión entera. Así:

	-∞	-4	-1/2	0	2	+∞
x+4	-	+	+	+	+	
$2(x+\frac{1}{2})$	-	-	+	+	+	
x	-	-	-	+	+	
x+2	-	-	-	-	+	
TOTAL	+	**-**	+	**-**	+	

En nuestro caso nos pedían calcular los x que hacían que $\frac{x(2x+1)}{x^2+2x-8} \leq 0$, con lo que sin más que mirar el cuadro anterior vemos que los intervalos que nos interesan son los que están coloreados en rojo, entre -4 y $-\frac{1}{2}$ y entre 0 y 2. Veamos ahora cómo son los extremos de los intervalos:

-4 es una raíz del denominador, por lo tanto <u>no puede entrar en el conjunto solución</u>, puesto que anularía al denominador y **NO PODEMOS DIVIDIR POR 0.**

2, por la misma razón, tampoco entra en el conjunto solución.

Tanto x=0 como x=$-\frac{1}{2}$ entran en el conjunto solución porque son los que hacen 0 el numerador y la inecuación nos pide los que hacen que la expresión sea menor o IGUAL que 0. Con estas consideraciones, el conjunto solución es:

$$\left(-4, \frac{-1}{2}\right] \cup [0,2)$$

Que también podemos expresar de esta forma:

$$\left\{x \in \Re \ni -4 < x \leq -\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x \in \Re \ni 0 \leq x < 2\right\}$$