Representar la función $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ calculando sus elementos principales.

Paso 1: Dominio de la función

Se trata de un cociente. El numerador es un polinomio, así que no presenta ningún problema. La función dejará de existir cuando el denominador se anule:

$$1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

El dominio de la función serán pues todos los números reales, excepto estos dos puntos.

$$Dom\ f(x)=\{\, x\in\Re \mid x\neq \pm 1 \,\}=(-\infty,-1)\cup(-1,1))\cup(1,\infty)$$

Paso 2: Simetrías

Tenemos que calcular $f(-x)$ y comprobar si es igual a $f(x)$ (en cuyo caso la función será par) o bien a $-f(x)$ (en cuyo caso sería impar).

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{1-(-x)^2}=\dfrac{-x^3}{1-x^2}=-f(x)$, con lo que la función presenta simetría impar (simetría respecto al origen)

Paso 3: Cortes con los ejes

Con el eje X, hacemos $f(x)=0$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{1-x^2}=0 \Leftrightarrow x=0$, lo que nos da el origen de coordenadas $(0,0)$

Con el eje Y, hacemos $x=0$ y, en este caso, obtenemos el mismo valor del origen.

Paso 4: Estudio de la 1ª derivada (Crecimiento y decrecimiento)

$$f'(x)=\frac{3x^2(1-x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{3x^2-3x^4+2x^4}{(1-x^2)^2}=\frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

La primera derivada se anula en los puntos $x=0$ y $x=\pm\sqrt{3}$. Como la función presenta simetría respecto al origen, vamos a estudiar qué pasa en los reales positivos y, por simetría, deduciremos el resto.

La función será creciente en aquellos puntos en que se verifique $f'(x)>0$. El denominador de la 1ª derivada siempre es positivo, al igual que la x^2 del numerador, así que el signo de $f'(x)$ sólo dependerá del signo de $(3-x^2)$. Es fácil comprobar que:

$f\downarrow$ en los intervalos $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ ya que $f'(x)<0$ y en $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ la función será $f\uparrow$. Con todo esto resulta que la función tendrá un mínimo en $\left(-\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y tendrá un máximo en $\left(\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Paso 5: Estudio de la 2ª derivada. (Concavidad)

$$f''(x)=\frac{\left(\left(2x(3-x^2)+x^2(-2x)\right)\left(1-x^2\right)^2\right)-\left(x^2(3-x^2)2(1-x^2)(-2x)\right)}{\left(1-x^2\right)^4}=$$

$$\frac{\left((6x-2x^3-2x^3)(1-x^2)\right)-\left((3x^2-x^4)(-4x)\right)}{(1-x^2)^3}=\frac{(6x-4x^3)(1-x^2)+12x^3-4x^5}{(1-x^2)^3}=$$

$$\frac{6x-6x^3-4x^3+4x^5+12x^3-4x^5}{(1-x^2)^3}=\frac{2x^3+6x}{(1-x^2)^3}=\frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$

El signo de la 2ª derivada nos dará la concavidad. Estudiamos qué pasa a partir de $x\geq 0$ y aplicaremos simetría:

El signo sólo dependerá del denominador, puesto que el numerador es positivo, así:

	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$1-x$	+	-
$1+x$	+	+
$(1-x^2)^3$	+	-

Tal como se aprecia en la tabla, la función será cóncava hacia arriba en $(0,1)$ y cóncava hacia abajo en $(1,\infty)$ y, aplicando simetrías, será cóncava hacia abajo en $(-1,0)$ y cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)$.

Paso 6: Asíntotas.

<u>Asíntotas horizontales</u>: No presenta.

<u>Asíntotas verticales</u>: Veamos qué pasa en los puntos que no pertenecen al dominio

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3}{1-x^2}\right)\to \textit{vemos límites laterales}\quad \begin{cases} x\to 1^+\Rightarrow y\to -\infty \\ x\to 1^-\Rightarrow y\to +\infty\end{cases}$$

Podemos aplicar simetría para ver qué pasaría en $x=-1$. De cualquier modo lo calculo también.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1}\left(\frac{x^3}{1-x^2}\right) \to \textit{vemos límites laterales} \quad \begin{array}{l} x \to -1^+ \Rightarrow y \to -\infty \\ x \to -1^- \Rightarrow y \to +\infty \end{array}$$

<u>*Asíntotas oblicuas*</u>: Son de la forma $y = mx + n$, donde $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx$

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x(1-x^2)} = -1$ y, de la misma forma, $n = \lim_{x \to \infty} \frac{x3}{1-x^2} + x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$, luego la recta $y = -x$ es una asíntota oblicua.

Con todos los elementos calculados, dibujamos la gráfica: