

Ejercicio 05

Representar la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ calculando sus elementos principales.

Paso 1: Dominio de la función

Se trata de un cociente. El numerador es un polinomio, así que no presenta ningún problema. La función dejará de existir cuando el denominador se anule:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

El dominio de la función serán pues todos los números reales, excepto estos dos puntos.

$$\text{Dom } f(x) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1 \} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

Paso 2: Simetrías

Tenemos que calcular $f(-x)$ y comprobar si es igual a $f(x)$ (en cuyo caso la función será par) o bien a $-f(x)$ (en cuyo caso sería impar).

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = \frac{-x^3}{1-x^2} = -f(x), \text{ con lo que la función presenta simetría impar}$$

(simetría respecto al origen)

Paso 3: Cortes con los ejes

Con el eje X, hacemos $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ lo que nos da el origen de coordenadas } (0,0)$$

Con el eje Y, hacemos $x = 0$ y, en este caso, obtenemos el mismo valor del origen.

Paso 4: Estudio de la 1ª derivada (Crecimiento y decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

La primera derivada se anula en los puntos $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$. Como la función presenta simetría respecto al origen, vamos a estudiar qué pasa en los reales positivos y, por simetría, deduciremos el resto.

La función será creciente en aquellos puntos en que se verifique $f'(x) > 0$. El denominador de la 1ª derivada siempre es positivo, al igual que la x^2 del numerador, así que el signo de $f'(x)$ sólo dependerá del signo de $(3 - x^2)$. Es fácil comprobar que:

$f \downarrow$ en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$ ya que $f'(x) < 0$ y en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ la función será $f \uparrow$. Con todo esto resulta que la función tendrá un mínimo en $\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y tendrá un máximo en $\left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Paso 5: Estudio de la 2ª derivada. (Concavidad)

$$f''(x) = \frac{\left((2x(3-x^2) + x^2(-2x))(1-x^2)^2\right) - (x^2(3-x^2)2(1-x^2)(-2x))}{(1-x^2)^4} =$$

$$\frac{\left((6x - 2x^3 - 2x^3)(1-x^2)\right) - \left((3x^2 - x^4)(-4x)\right)}{(1-x^2)^3} = \frac{(6x - 4x^3)(1-x^2) + 12x^3 - 4x^5}{(1-x^2)^3} =$$

$$\frac{6x - 6x^3 - 4x^3 + 4x^5 + 12x^3 - 4x^5}{(1-x^2)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(1-x^2)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1-x^2)^3}$$

El signo de la 2ª derivada nos dará la concavidad. Estudiamos qué pasa a partir de $x \geq 0$ y aplicaremos simetría:

El signo sólo dependerá del denominador, puesto que el numerador es positivo, así:

	(0,1)	(1,∞)
$1-x$	+	-
$1+x$	+	+
$(1-x^2)^3$	+	-

Tal como se aprecia en la tabla, la función será cóncava hacia arriba en (0,1) y cóncava hacia abajo en (1,∞) y, aplicando simetrías, será cóncava hacia abajo en (-1,0) y cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$.

Paso 6: Asíntotas.

Asíntotas horizontales: No presenta.

Asíntotas verticales: Veamos qué pasa en los puntos que no pertenecen al dominio

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3}{1-x^2} \right) \rightarrow \text{vemos límites laterales}$$

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

Podemos aplicar simetría para ver qué pasaría en $x = -1$. De cualquier modo lo calculo también.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^3}{1-x^2} \right) \rightarrow \text{vemos límites laterales}$$

$$x \rightarrow -1^+ \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -1^- \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, donde $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ y

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(1-x^2)} = -1 \quad \text{y, de la misma forma,}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{1-x^2} + x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x^2} = 0, \text{ luego la recta } y = -x \text{ es una}$$

asíntota oblicua.

Con todos los elementos calculados, dibujamos la gráfica:

