Representar la función $f(x)=x\cdot e^{-x}$ calculando sus elementos principales.

Paso 1: Dominio de la función

La función dada está bien definida para cualquier valor real, es continua y derivable. Su dominio son todos los números reales, $Domf\ =\Re$

Paso 2: Simetrías

Tenemos que calcular $f(-x)$ y comprobar si es igual a $f(x)$ (en cuyo caso la función será par) o bien a $-\ f(x)$ (en cuyo caso sería impar).

$f(-x)=(-x)\cdot e^{-(-x)}=-x\cdot e^{x}$ que, como es claro, es distinta tanto de $f(x)$ como de $-\ f(x)$, con lo que la función dada no presenta simetrías.

Paso 3: Cortes con los ejes

$f(x)=0$, $x\cdot e^{-x}=0\Leftrightarrow x=0$, ya que $e^{-x}\neq 0$ para cualquier valor real *x*. Tenemos pues el punto de corte $(0,0)$

Paso 4: Estudio de la 1ª derivada (Crecimiento y decrecimiento)

$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot(-1)\cdot e^{-x}=e^{-x}-x\cdot e^{-x}=(1-x)\cdot e^{-x}$

La función será creciente en aquellos puntos en que se verifique $f'(x)>0$

$f'(x)>0\Leftrightarrow(1-x)e^{-x}>0$. Como la función exponencial $e^{-x}>0$ siempre, tendremos que $f'(x)>0\Leftrightarrow(1-x)>0\Leftrightarrow x<1$, así $f\uparrow$ en $(-\infty,1)$ y será decreciente en $(1,\infty)$.

Como la función es continua, tendremos un máximo en $x=1$, puesto que la función pasa de ser creciente a decreciente. No obstante, lo estudiaremos también con la 2ª derivada.

Paso 5: Estudio de la 2ª derivada. (Concavidad, extremos)

$f''(x)=(-1)\cdot e^{-x}+(1-x)(-1)e^{-x}=-e^{-x}-e^{-x}+x\cdot e^{-x}=(x-2)\cdot e^{-x}$

Para $x=1$, que es el punto que anulaba a la 1ª derivada, $f''(1)=(1-2)\cdot e^{-1}=-e^{-1}<0$, lo que nos dice que en $x=1$ se alcanza un máximo.

El punto será el $\left(1,\frac{1}{e}\right)$ (para calcular este punto no tienes mas que sustituir el valor de $x=1$ en la función). Vamos a estudiar el signo de la 2ª derivada para ver la concavidad:

Como $e^{-x}>0$ siempre, el signo de f'' dependerá sólo de $x-2$, luego tendremos que

*) si $x>2$ la función será cóncava hacia arriba

*) si $x<2$ la función será cóncava hacia abajo.

*) Si $x=2$ $f''(2)=0$, y así tendré que $x=2$ es un punto de inflexión, ya que $f'''(2)\neq 0$ (compruébalo calculando la 3ª derivada de la función).

Paso 6: Asíntotas.

<u>Asíntotas horizontales</u>: Estudiemos qué pasa cuando $x\to\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot e^{-x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$, luego $y=0$ es una asíntota horizontal

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x\cdot e^{-x})=\lim\limits_{x\to\infty}(-x\cdot e^{x})=-\infty$

Con todos los elementos calculados, dibujamos la gráfica: