Ejercicio 03

Representar gráficamente la función $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4}$

Paso 1: Dominio de la función

La función es un cociente, por tanto el dominio serán todos aquellos puntos que no anulen al denominador. Así:

$Domf=\{x\in\Re \ni x^2+4\neq 0\}$. Como $x^2+4\neq 0 \quad \forall x\in\Re$, podemos concluir que $Domf=\Re$

Paso 2: Simetrías

Recordemos que la función será PAR cuando $f(-x)=f(x)$ y será IMPAR cuando $f(-x)=-f(x)$

$f(-x)=\dfrac{2}{(-x)^2+4}=\dfrac{2}{x^2+4}=f(x)$, por lo que la función es PAR (simétrica respecto al eje OY)

Paso 3: Cortes con los ejes

Con el eje OY: Tendremos que hacer $x=0$, y así $f(0)=\dfrac{2}{0+4}=\dfrac{1}{2}$. Punto de corte $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

Con el eje OX: Hacemos f(x)=0 y planteamos la ecuación.

$$0=\frac{2}{x^2+4}$$

que evidentemente no tiene solución ya que el numerador es distinto de 0 siempre.

Paso 4: Estudio de la 1ª derivada (Crecimiento y decrecimiento)

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x^2+4)-2\cdot(2x+0)}{(x^2+4)^2}=\frac{-4x}{(x^2+4)^2}.$$

Hemos de estudiar el signo de esta función. Donde la primera derivada sea positiva la función será creciente y donde sea negativa la función será decreciente.

El denominador de la 1ª derivada es siempre positivo, ya que está elevado al cuadrado, luego el signo de la 1ª derivada y por tanto el crecimiento de la función, dependerá exclusivamente del signo del numerador.

$f\uparrow$ cuando $f'>0$. $f'>0 \Leftrightarrow -4x>0 \Leftrightarrow x<0$, luego f será creciente en $(-\infty,0)$

$f\downarrow$ cuando $f'<0$. $f'<0 \Leftrightarrow -4x<0 \Leftrightarrow x>0$, luego f será decreciente en $(0,+\infty)$

Si la f es creciente hasta llegar a 0 y decreciente a partir de ese punto, en x=0 (que es un punto del dominio) tendremos un máximo. (lo comprobaremos con la 2ª derivada)

Paso 5: Estudio de la 2ª derivada. (Concavidad, extremos)

$f''(x)=\dfrac{-4\cdot(x^2+4)^2-(-4x)\cdot 2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4}=\dfrac{-4(x^2+4)+16x^2}{(x^2+4)^3}=\dfrac{12x^2-16}{(x^2+4)^3}$. Recordemos que la función es cóncava hacia abajo $(\cap)$ cuando $f''<0$ y es cóncava hacia arriba $(\cup)$ cuando $f''>0$. En nuestro caso se trata de estudiar el signo de la expresión $\dfrac{12x^2-16}{(x^2+4)^3}$.

El denominador siempre es positivo, luego el signo de la 2ª derivada dependerá sólo del signo del numerador. Estudiemos el signo de $12x^2-16$. Las raíces de este polinomio son $\dfrac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$. Construimos una tabla para estudiar los signos:

	$-\infty$ a $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ a ∞
$\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	-	+	+
$\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	-	-	+
$12x^2-16$	+	-	+
	$\cup$	$\cap$	$\cup$
$f(x)$	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Comprobemos qué sucede con el punto $x=0$, que era el que anulaba a la 1ª derivada.

$f''(0)=\frac{-16}{4^3}=\frac{-16}{64}<0$, luego es un x=0 es un máximo, como ya sabíamos.

Para tener más elementos a la hora de pintar la función habría que ver qué sucede con la función para valores muy grandes de x $(x\to\infty)$ y para valores muy pequeños $(x\to-\infty)$. En nuestro caso, como la función es simétrica respecto al eje OY, sólo hace falta estudiarlo en uno de los casos.

La función siempre toma valores positivos, ya que tanto numerador como denominador son siempre positivos. Cuando la x se hace grande, el denominador se hace también muy grande, tan grande como queramos y, por tanto, el cociente se hará cada vez más pequeño, pero sin llegar a cortar nunca al eje OX, ya que no hay puntos de corte con este eje. El eje OX es lo que llamamos una "asíntota", ya que la función se va acercando cada vez más a esa recta sin llegar nunca a cortarla.

Con todos estos datos procedemos a pintar la función

(Se ha cambiado la escala en los ejes para que pueda apreciarse mejor la forma de la gráfica. Los puntos rojos corresponden a los cambios en la concavidad $\frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$)