Ejercicio 02

Representar gráficamente la función $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$

Paso 1: Dominio de la función

La función es un cociente, por tanto el dominio serán todos aquellos puntos que no anulen al denominador. Así:

$Domf=\{x\in\Re \ni x^2-4\neq 0\}$. Como $x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm 2$, podemos concluir que $Domf=\Re-\{-2,2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$

Paso 2: Simetrías

Recordemos que la función será PAR cuando $f(-x)=f(x)$ y será IMPAR cuando $f(-x)=-f(x)$

$f(-x)=\dfrac{2}{(-x)^2-4}=\dfrac{2}{x^2-4}=f(x)$, por lo que la función es PAR (simétrica respecto al eje OY)

Paso 3: Cortes con los ejes

Con el eje OY: Tendremos que hacer $x=0$, y así $f(0)=\dfrac{2}{0-4}=-\dfrac{1}{2}$. Punto de corte $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$

Con el eje OX: Hacemos f(x)=0 y planteamos la ecuación.

$$0=\frac{2}{x^2-4}$$

que evidentemente no tiene solución ya que el numerador es distinto de 0 siempre.

Paso 4: Estudio de la 1ª derivada (Crecimiento y decrecimiento)

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x^2-4)-2\cdot(2x-0)}{(x^2-4)^2}=\frac{-4x}{(x^2-4)^2}.$$

Hemos de estudiar el signo de esta función. Donde la primera derivada sea positiva la función será creciente y donde sea negativa la función será decreciente.

El denominador de la 1ª derivada es siempre positivo, ya que está elevado al cuadrado, luego el signo de la 1ª derivada y por tanto el crecimiento de la función, dependerá exclusivamente del signo del numerador.

$f\uparrow$ cuando $f' > 0$. $f' > 0 \Leftrightarrow -4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$, luego f será creciente en $(-\infty,0)$

$f\downarrow$ cuando $f' < 0$. $f' < 0 \Leftrightarrow -4x < 0 \Leftrightarrow x > 0$, luego f será decreciente en $(0,+\infty)$

Si la f es creciente hasta llegar a 0 y decreciente a partir de ese punto, en x=0 (que es un punto del dominio) tendremos un máximo. (lo comprobaremos con la 2ª derivada)

Paso 5: Estudio de la 2ª derivada. (Concavidad, extremos)

$$f''(x) = \frac{-4\cdot(x^2-4)^2-(-4x)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \frac{-4(x^2-4)+16x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{12x^2+16}{(x^2-4)^3}.$$

Recordemos que la función es cóncava hacia abajo $(\cap)$ cuando $f'' < 0$ y es cóncava hacia arriba $(\cup)$ cuando $f'' > 0$. En nuestro caso se trata de estudiar el signo de la expresión $\frac{12x^2+16}{(x^2-4)^3}$. El numerador siempre es positivo, luego el signo de la 2ª derivada dependerá sólo del signo del denominador. Estudiemos el signo de $(x^2-4)^3$. Las raíces de este polinomio son ± 2. Construimos una tabla para estudiar los signos:

	-∞ … -2	-2 … 2	2 … ∞
$(x+2))$	-	+	+
$(x-2))$	-	-	+
$(x^2-4)^3$	+	-	+
	$\cup$	$\cap$	$\cup$
$f(x)$	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Comprobemos qué sucede con el punto $x=0$, que era el que anulaba a la 1ª derivada.

$f''(0)=\frac{16}{(-4)^3}=\frac{16}{-64}<0$, luego es un x=0 es un máximo, como ya sabíamos.

Paso 6: Asíntotas

<u>Asíntotas horizontales</u>: Estudiemos qué pasa cuando $x\to\pm\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2-4}=0$. De la misma forma tenemos que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2-4}=0$.

Por tanto la recta $y=0$ es una asíntota horizontal.

<u>Asíntotas verticales</u>: Los puntos que pueden causar problemas son los que no pertenecen al dominio de la función, en nuestro caso $x=\pm 2$

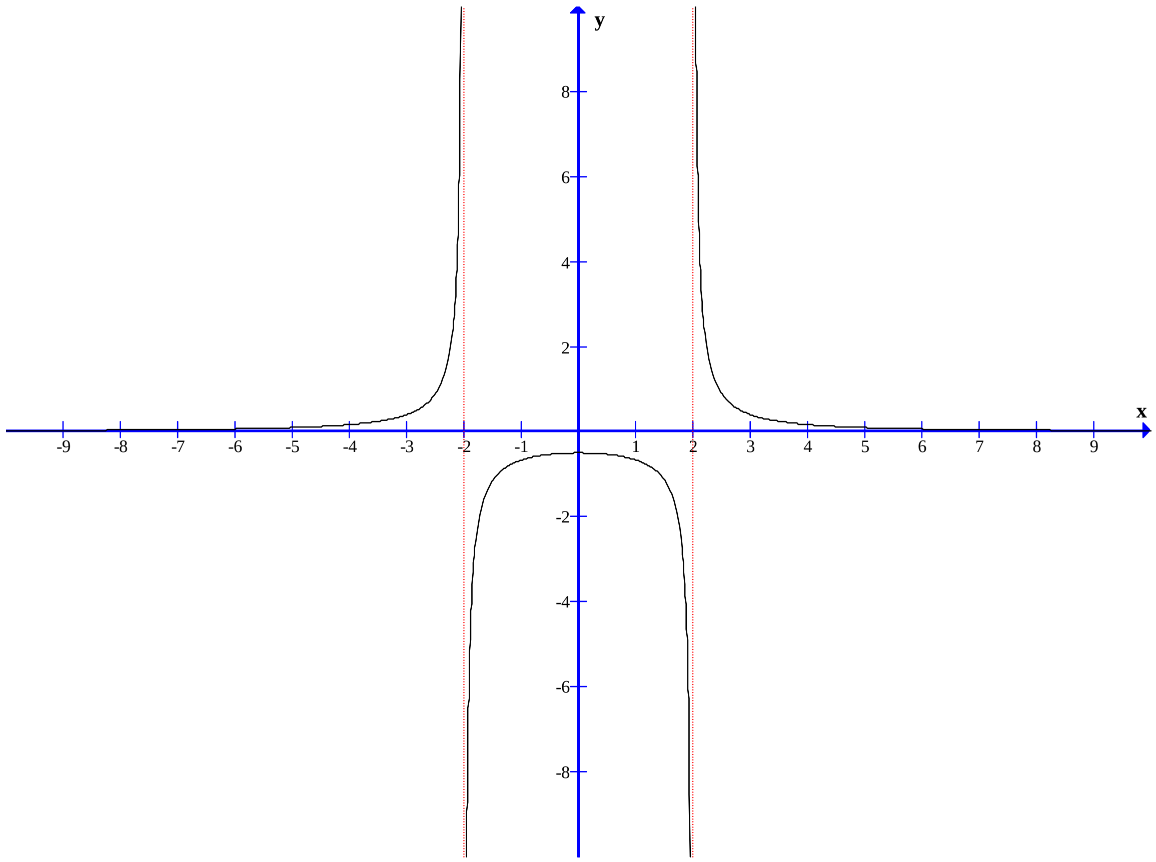
$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2}{x^2-4}$ Recordemos que un límite existe cuando existen los dos límites laterales y coinciden. Así estudiaremos dos límites:

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{x^2-4}=+\infty$ (Valores más grandes que 2 al cuadrado son valores mayores que 4 y por tanto el denominador tiende a 0 pero con valores siempre positivos)

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{2}{x^2-4}=-\infty$ (Valores más pequeños que 2 al cuadrado son valores menores que 4 y por tanto el denominador tiende a 0 pero con valores siempre negativos)

Pasa exactamente lo mismo en el caso de que $x\to -2$

Con todos estos datos procedemos a pintar la función:


y
x
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9