

Ejercicio 01

Representar gráficamente la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

Paso 1: Dominio de la función

Como se trata de un polinomio, el dominio de la función son todos los números reales, es decir, $Domf = \mathfrak{R}$

Paso2: Simetrías

Recordemos que la función será PAR cuando $f(-x) = f(x)$ y será IMPAR cuando $f(-x) = -f(x)$

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 + (-x) - 2 = -x^3 - 2x^2 - x - 2$, resultado que es distinto tanto de $f(x)$ como de $-f(x)$ y, por tanto, la función no tiene simetrías.

Paso3: Cortes con los ejes

Con el eje OY: Tendremos que hacer $x = 0$, y así $f(0) = -2$. Punto de corte $(0, -2)$

Con el eje OX: Hacemos $f(x)=0$ y resolvemos la ecuación.

$$0 = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

Aplicamos la Regla de Ruffini para calcular una solución entera de la ecuación. Como hemos de probar por los divisores del término independiente, lo hacemos con $x=2$

2	1	-2	1	-2	El resto es 0, así $x = 2$ es una raíz. Descomponemos el
		2	0	2	polinomio de partida en producto de 2 factores:
	1	0	1	0	$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2) \cdot (x^2 + 1)$

La única raíz real es $x = 2$ y por tanto el punto de corte con OX es el $(2, 0)$

Paso 4: Estudio de la 1ª derivada (Crecimiento y decrecimiento)

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Hemos de estudiar el signo de esta función. Donde la primera derivada sea positiva la función será creciente y donde sea negativa la función será decreciente. Veamos dónde es, por ejemplo, positiva $3x^2 - 4x + 1 > 0$. Resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ Despejamos } x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} 1 \\ 1/3 \end{cases}$$

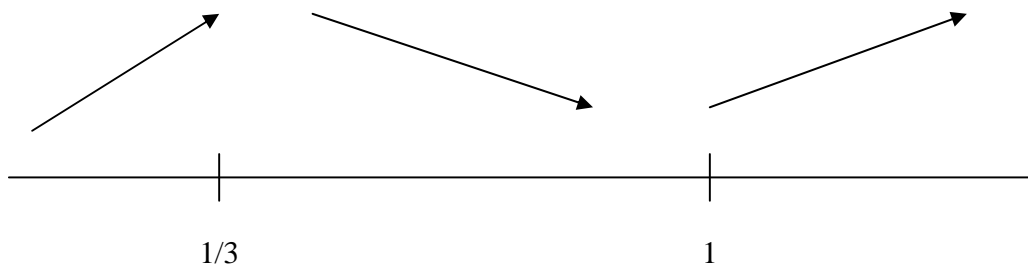
Tendremos así que: $3x^2 - 4x + 1 = 3(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$, con lo que $3x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow$

$$\text{Caso A: } \begin{cases} (x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ (x - \frac{1}{3}) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3} \end{cases}, \text{ cuya solución es } x > 1$$

$$\text{Caso B: } \begin{cases} (x-1) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \\ (x - \frac{1}{3}) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \end{cases}, \text{ cuya solución es } x < \frac{1}{3}$$

Resumiendo: la función es creciente en los siguientes intervalos: $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$. La

función es decreciente en el intervalo $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$. Gráficamente:



De acuerdo con este gráfico, $x = \frac{1}{3}$ corresponderá a un máximo y $x = 1$ a un mínimo (ambos puntos pertenecen al dominio de la función). Los puntos donde se alcanzan este máximo y mínimo se obtendrán sustituyendo en la función los valores de x y calculando los correspondientes de la y . Así:

$$\text{Máximo: } \left(\frac{1}{3}, -\frac{50}{27}\right); \text{ Mínimo: } (1, -2)$$

Paso 5: Estudio de la 2ª derivada. (Concavidad, extremos)

$f''(x) = 6x - 4$. Recordemos que la función es cóncava hacia abajo (\cap) cuando $f'' < 0$ y es cóncava hacia arriba (\cup) cuando $f'' > 0$. En nuestro caso $6x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Resumiendo:

$f'' > 0$ en $x > \frac{2}{3}$, luego la función será cóncava hacia arriba en $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ y será cóncava

hacia abajo en el resto de \mathfrak{R} , es decir, en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$. Tal como habíamos visto ya al estudiar

el crecimiento de la función:

$f'\left(\frac{1}{3}\right) = -2 < 0$, luego $x = \frac{1}{3}$ es un máximo.

$f'(1) = 2 > 0$, luego $x = 1$ es un mínimo.

Con todos estos datos procedemos a pintar la función

Paso 6: Asíntotas.

Como es un polinomio, no hay asíntotas.

