Representar gráficamente la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

Paso 1: Dominio de la función

Como se trata de un polinomio, el dominio de la función son todos los números reales, es decir, $Domf = \Re$

Paso2: Simetrías

Recordemos que la función será PAR cuando $f(-x) = f(x)$ y será IMPAR cuando $f(-x) = -f(x)$

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 + (-x) - 2 = -x^3 - 2x^2 - x - 2$, resultado que es distinto tanto de $f(x)$ como de $-f(x)$ y, por tanto, la función no tiene simetrías.

Paso3: Cortes con los ejes

Con el eje OY: Tendremos que hacer $x = 0$, y así $f(0) = -2$. Punto de corte $(0,-2)$

Con el eje OX: Hacemos f(x)=0 y resolvemos la ecuación.

$$0 = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

Aplicamos la Regla de Ruffini para calcular una solución entera de la ecuación. Como hemos de probar por los divisores del término independiente, lo hacemos con x=2

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

El resto es 0, así $x = 2$ es una raíz. Descomponemos el polinomio de partida en producto de 2 factores:

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)\cdot(x^2+1)$

La única raíz real es $x = 2$ y por tanto el punto de corte con OX es el $(2,0)$

Paso 4: Estudio de la 1ª derivada (Crecimiento y decrecimiento)

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Hemos de estudiar el signo de esta función. Donde la primera derivada sea positiva la función será creciente y donde sea negativa la función será decreciente. Veamos dónde es, por ejemplo, positiva $3x^2 - 4x + 1 > 0$. Resolvemos la ecuación de 2º grado:

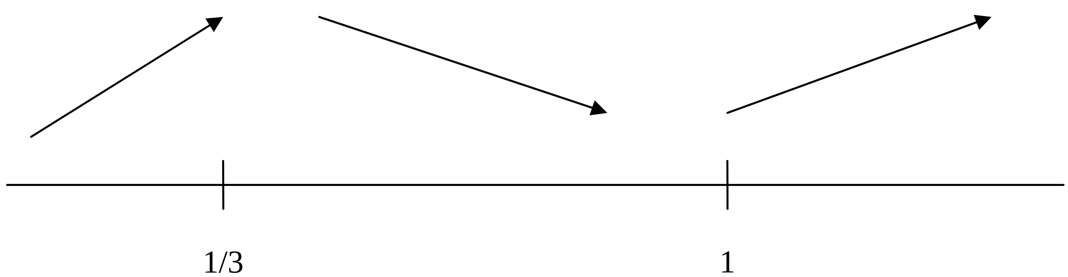
$3x^2-4x+1=0$ Despejamos $x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\dfrac{4\pm 2}{6}=\begin{cases}1\\ 1/3\end{cases}$

Tendremos así que: $3x^2-4x+1=3(x-1)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$, con lo que $3x^2-4x+1>0\Leftrightarrow$

Caso A: $\begin{cases}(x-1)>0\Leftrightarrow x>1\\ (x-\frac{1}{3})>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{3}\end{cases}$, cuya solución es $x>1$

Caso B: $\begin{cases}(x-1)<0\Leftrightarrow x<1\\ (x-\frac{1}{3})<0\Leftrightarrow x<\frac{1}{3}\end{cases}$, cuya solución es $x<\dfrac{1}{3}$

Resumiendo: la función es creciente en los siguientes intervalos: $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$. La función es decreciente en el intervalo $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$. Gráficamente:



De acuerdo con este gráfico, $x=\dfrac{1}{3}$ corresponderá a un máximo y $x=1$ a un mínimo (ambos puntos pertenecen al dominio de la función). Los puntos donde se alcanzan este máximo y mínimo se obtendrán sustituyendo en la función los valores de x y calculando los correspondientes de la y. Así:

Máximo: $\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{50}{27}\right)$; Mínimo: (1,-2)

Paso 5: Estudio de la 2ª derivada. (Concavidad, extremos)

$f''(x)=6x-4$. Recordemos que la función es cóncava hacia abajo ($\cap$) cuando $f''<0$ y es cóncava hacia arriba ($\cup$) cuando $f''>0$. En nuestro caso $6x-4>0\Leftrightarrow x>\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

Resumiendo:

$f'' > 0$ en $x > \frac{2}{3}$, luego la función será cóncava hacia arriba en $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ y será cóncava hacia abajo en el resto de $\Re$, es decir, en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$. Tal como habíamos visto ya al estudiar el crecimiento de la función:

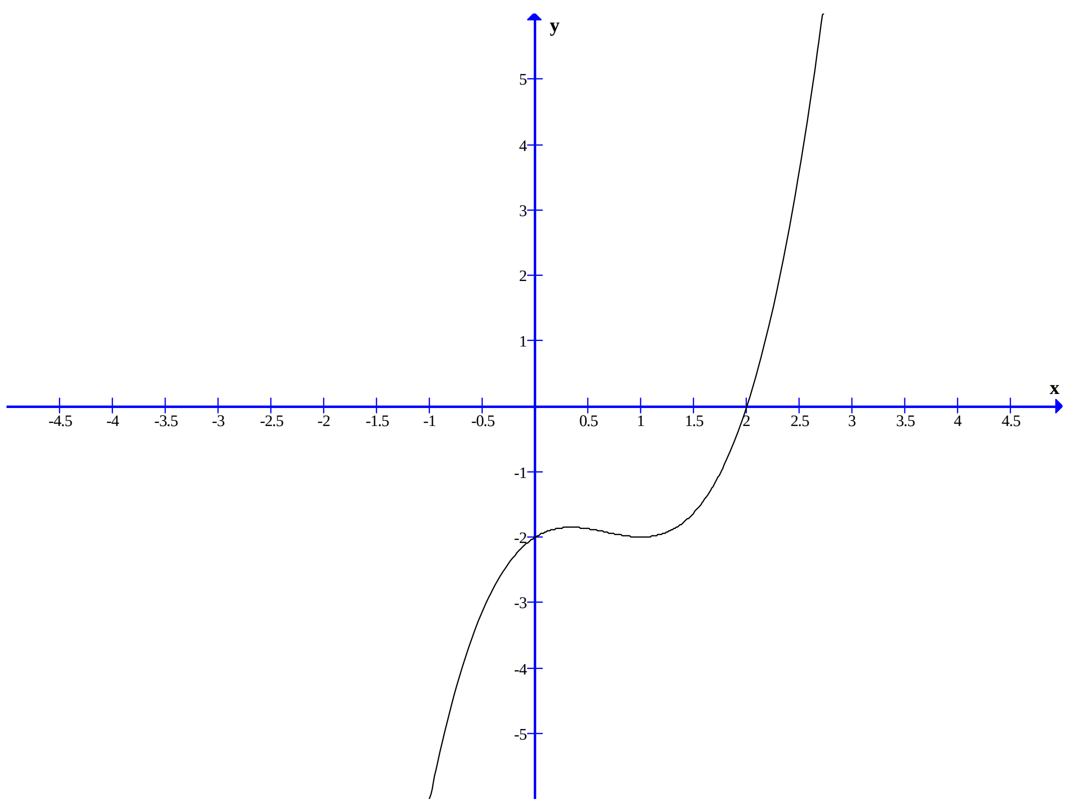
$f''\left(\frac{1}{3}\right) = -2 < 0$, luego $x = \frac{1}{3}$ es un máximo.

$f''(1) = 2 > 0$, luego $x = 1$ es un mínimo.

Con todos estos datos procedemos a pintar la función

Paso 6: Asíntotas.

Como es un polinomio, no hay asíntotas.



Inicio del problema