# POLINOMIOS

## Definición

Un polinomio en la indeterminada “x” es una expresión de la forma

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ..... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde a cada una de las $a_i$ son números reales que se les llama *coeficientes*, la “x” es la variable o indeterminada y “n” es un número natural. Si el término de mayor grado es $a_n x^n$, se dice que el *grado del polinomio* es n.

## Operaciones con polinomios

***Suma***: Para sumar dos polinomios, se deben agrupar los términos que tienen el mismo grado y sumar sus coeficientes. Por ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=3x^5-2x^4+5x^2+3x-2 \\ Q(x)=6x^4+2x^3-3x^2+6 \end{array}\right\}$$

$$\begin{gathered} P(x)+Q(x)=(3x^5-2x^4+5x^2+3x-2)+(6x^4+2x^3-3x^2+6)= \\ 3x^5-2x^4+6x^4+2x^3+5x^2-3x^2+3x-2+6= \\ 3x^5+4x^4+2x^3+2x^2+3x+4 \end{gathered}$$

***Resta***: Para restar dos polinomios deben agruparse, como en el caso de la suma, los términos del mismo grado, cambiar de signo cada uno de los términos del polinomio sustraendo y sumar. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=3x^5-2x^4+5x^2+3x-2 \\ Q(x)=6x^4+2x^3-3x^2+6 \end{array}\right\}$$

$$\begin{gathered} P(x)-Q(x)=(3x^5-2x^4+5x^2+3x-2)-(6x^4+2x^3-3x^2+6)= \\ 3x^5-2x^4+5x^2+3x-2-6x^4-2x^3+3x^2-6 \\ 3x^5-2x^4-6x^4-2x^3+5x^2+3x^2+3x-2-6= \\ 3x^5-8x^4-2x^3+8x^2+3x-8 \end{gathered}$$

***Multiplicación***: Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada término de uno por cada término del otro y se agrupa (hemos de tener presentes las propiedades de las potencias). Con nuestro ejemplo sería:

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=5x^2+3x-2 \\ Q(x)=2x^3-3x^2+6 \end{array}\right\}$$

$$\begin{gathered} P(x)\cdot Q(x)=(5x^2+3x-2)\cdot(2x^3-3x^2+6)= \\ 5x^2\cdot(2x^3-3x^2+6)+3x\cdot(2x^3-3x^2+6)-2\cdot(2x^3-3x^2+6)= \\ 10x^5-15x^4+30x^2+6x^4-9x^3+18x-4x^3+6x^2+12= \\ 10x^5-15x^4+6x^4-9x^3-4x^3+30x^2+6x^2+18x+12= \\ 10x^5-9x^4-13x^3+36x^2+18x+12 \end{gathered}$$

***División***: Para poder dividir dos polinomios, el grado del dividendo ha de ser mayor o igual que el grado del divisor, es decir, $grP(x)\geq grQ(x)$. La división habrá acabado cuando el grado del resto sea menor que el grado del divisor.

Entenderemos mejor cómo se dividen polinomios con un ejemplo desarrollado completamente:

Dividir $P(x)=2x^4+5x^3+4x^2-3x+3$ entre $Q(x)=x^2+3x-1$

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+5x^3+4x^2-3x+3 & x^2+3x-1 \\ \hline \end{array}$$

Hay que encontrar una expresión que, multiplicada por $x^2$ nos de $2x^4$ (el objetivo es ir eliminando paso a paso las x de mayor grado hasta lograr que el grado del resto sea menor que el del divisor). Está claro que dicho valor es $2x^2$. Se procede de la misma forma que en una división normal. Se multiplica la expresión que acabamos de calcular por el divisor, se cambia de signo y se suma con el dividendo:

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+5x^3+4x^2-3x+3 & x^2+3x-1 \\ \cline{2-2} -2x^4-6x^3+2x^2 & 2x^2 \\ \cline{1-1} \qquad -x^3+6x^2-3x+3 & \end{array}$$

En el siguiente paso, hay que lograr una expresión que multiplicada por $x^2$ nos de $-x^3$. Está claro que es $-x$ y así :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^4+5x^3+4x^2-3x+3 & x^2+3x-1 \\ \cline{3-3}
 & -2x^4-6x^3+2x^2 & 2x^2-x \\ \hline
 & -x^3+6x^2-3x+3 & \\
 & +x^3+3x^2-x & \\ \hline
 & 9x^2-4x+3 &
\end{array}
$$

Finalmente y siguiendo el mismo procedimiento:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^4+5x^3+4x^2-3x+3 & x^2+3x-1 \\ \cline{3-3}
 & -2x^4-6x^3+2x^2 & 2x^2-x+9 \\ \hline
 & -x^3+6x^2-3x+3 & \\
 & +x^3+3x^2-x & \\ \hline
 & 9x^2-4x+3 & \\
 & -9x^2-27x+9 & \\ \hline
 & -31x+12 &
\end{array}
$$

Hemos acabado puesto que el resto, $R(x)=-31x+12$ es de grado 1, mientras que el divisor era de grado 2. El cociente es el polinomio $C(x)=2x^2-x+9$.

Podemos comprobar el resultado, ya que siempre se verifica que:

$$\boxed{\textit{Dividendo} = \textit{Divisor} * \textit{Cociente} + \textit{Resto}}$$