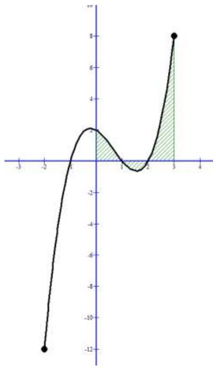
APLICACIONES DE LAS INTEGRALES I

1. Calcular el área determinada por la función $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ entre 0 y 3.



Lo primero que vamos a hacer es calcular los puntos de corte de la función con el eje de abcisas (x). Para ello resolvemos la ecuación $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. Es fácil ver que los puntos de corte son $x = -1, x = 1\ y\ x = 2$. Todos estos puntos están entre los dos valores que nos plantea el ejercicio, con lo que :

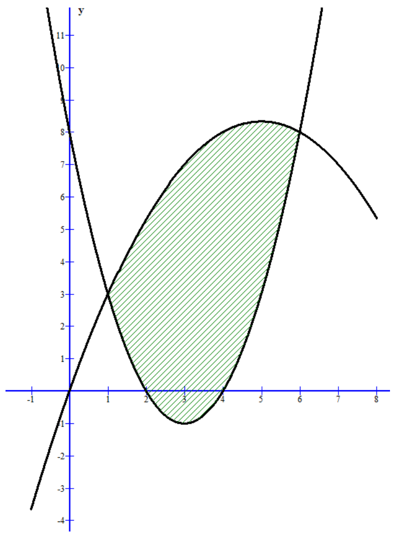
$$A = \left|\int_0^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2)dx\right| + \left|\int_2^3 (x^3 - 2x^2 - x + 2)dx\right| =$$

$$= \left|\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right|_0^1 + \left|\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right|_1^2 + \left|\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right|_2^3 =$$

$$= \left|\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right| + \left|\frac{16}{4} - \frac{16}{3} - \frac{4}{2} + 4 - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right| + \left|\frac{81}{4} - \frac{54}{3} - \frac{9}{2} + 6 - \left(\frac{16}{4} - \frac{16}{3} - \frac{4}{2} + 4\right)\right|$$

$$= \frac{13}{12} + \left|-\frac{5}{12}\right| + \frac{37}{12} = \frac{13}{12} + \frac{5}{12} + \frac{37}{12} = \frac{55}{12}\ u.a.$$

2. Calcular el área encerrada por las funciones :



$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \quad y \quad g(x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{10}{3}x$$

Representamos gráficamente el recinto que determinan ambas funciones. Son parábolas que no ofrecen mayor dificultad (en caso de que no recuerdes bien cómo hacerlo puedes consultar http://tagoras.es/parabolas.htm

Resolvemos la ecuación $f(x) = g(x)$ para calcular sus puntos de intersección.

$$x^2 - 6x + 8 = -\frac{x^2}{3} + \frac{10}{3}x \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = -x^2 + 10x \Rightarrow 4x^2 - 28x + 24 = 0$$

Lo que nos da unos valores para x de $x = 1\ \ x = 6$ y así los puntos son (1 , 3) y (6 , 8)

$$A = \left|\int_1^6 \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{10}{3}x\right) - (x^2 - 6x + 8)dx\right| = \left|\int_1^6 \left(\frac{-4x^2}{3} + \frac{28}{3}x - 8\right)dx\right| =$$

$$\left|\frac{-4}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{28}{3}\frac{x^2}{2} - 8x\right|_1^6 = \left|\frac{-4x^3}{9} + \frac{14}{3}x^2 - 8x\right|_1^6 = \frac{200}{9}\ u.a.$$