INTEGRACIÓN TRIGONOMÉTRICAS II

1. $\int \boldsymbol{R(senx, cosx)\ dx}$, siendo R una función racional. En este caso efectuamos el cambio de variable $tg\frac{x}{2} = t$, de donde resulta que $sen\,x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ y $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

   Con este cambio, la integral trigonométrica suele transformarse en una racional. Como siempre, algunos ejemplos:

   a) $\int \frac{4}{1-cosx}dx$ Aplicando el cambio de variable descrito al principio,

$$\int \frac{4}{1-cosx}dx = \int \frac{4}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{8\,dt}{1+t^2-1+t^2} = 4\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{4}{t} + K = \frac{-4}{tag\frac{x}{2}} + K$$

   b) $\int \frac{sen\,x}{1+sen\,x}dx$. Aplicamos $tg\frac{x}{2} = t$, con lo que $sen\,x = \frac{2t}{1+t^2}$ y $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{sen\,x}{1+sen\,x}dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{4t\,dt}{(1+t)^2(1+t^2)}$$

$$\frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{Cx+D}{1+t^2}$$

Resolvemos dando valores a t

Para $t = -1, -4 = 2B \Rightarrow B = -2$

Si $t = 0,\quad 0 = A - 2 + D \ \Rightarrow\ A = 2 - D$

Si $t = 1,\ A + 2C + 2D = 4$

Finalmente, si $t = -2, -A - 2C + D = 2$. Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones, $A = 0,\ B = -2,\ C = 0,\ D = 2$ y podemos escribir entonces que

$$\int \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}dt = \int \frac{-2\,dt}{(1+t)^2} + \int \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{2}{1+t} + 2\,arctg\,t + K =$$

$$\frac{2}{1+tg\,(x/2)} + 2\,arctg\,tg\frac{x}{2} + K = \frac{2}{1+tg\,(x/2)} + x + K$$