

INTEGRACIÓN TRIGONOMÉTRICAS I

Este tipo de integrales son en las que aparecen alguna razón trigonométrica. Veremos sólo los métodos más sencillos.

1. $\int \text{sen}^m x \cos^n x \, dx$, donde m y n son números enteros, uno de los cuales (o los dos) son impares. En este caso tenemos o bien una integral inmediata o bien una integral que puede transformarse en inmediata utilizando el Teorema Fundamental de la Trigonometría $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Veamos un par de ejemplos

$$\text{a) } \int \cos x \text{sen}^6 x \, dx = \frac{1}{7} \text{sen}^7 x + K$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \text{sen}^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \text{sen} x \text{sen}^2 x \cos^2 x \, dx = \int \text{sen} x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \, dx = \\ &= \int \text{sen} x (\cos^2 x - \cos^4 x) \, dx = \int \text{sen} x \cos^2 x \, dx - \int \text{sen} x \cos^4 x \, dx = \\ &= \frac{-1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + K \end{aligned}$$

2. $\int \text{sen}^m x \cos^n x \, dx$, donde m y n son números enteros pares. En este caso, utilizaremos las siguientes fórmulas para transformar la integral:

$$\text{sen} x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} \quad ; \quad \cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} \quad ; \quad \text{sen} 2x = 2 \text{sen} x \cos x$$

$$\text{a) } \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \text{sen} 2x + K$$

- b) $\int \text{sen}^4 x \cos^2 x \, dx = \int \text{sen}^2 x \text{sen}^2 x \cos^2 x \, dx = \int \text{sen}^2 x (\text{sen} x \cos x)^2 \, dx$. De las fórmulas que hemos planteado antes, utilizamos

$$\begin{aligned} \text{sen} x &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \\ \dots \dots \int \text{sen}^2 x (\text{sen} x \cos x)^2 \, dx &= \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \frac{1}{4} \text{sen}^2 2x \, dx = \\ \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x) \text{sen}^2 2x \, dx &= \frac{1}{8} \left[\int \text{sen}^2 2x \, dx - \int \cos 2x \text{sen}^2 2x \, dx \right] = \\ \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) \, dx - \frac{1}{8} \int 2 \cos 2x \text{sen}^2 2x \, dx &= \\ \frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \frac{1}{4} \text{sen} 4x - \frac{1}{16} \frac{1}{3} \text{sen}^3 2x + K \end{aligned}$$