INTEGRACIÓN RACIONALES (IV)

1. $\int \frac{dx}{x^3-x^2+x-1}$ Comenzamos calculando las raíces del denominador. Está claro que $x=1$ es una raíz, con lo que aplicando la RF tendremos la siguiente descomposición en producto de factores: $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$. Han aparecido las primeras raíces complejas. En estos casos, la fracción se descompone del siguiente modo:

	1	-1	1	-1
1		1	0	1
	1	0	1	0

$$\frac{dx}{x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Y procedemos de la misma forma para calcular A, B y C.

$$\frac{dx}{x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

Podemos resolver el sistema de ecuaciones o proceder como en el ejercicio anterior dando valores.

$$Para\ x=0\ \rightarrow\ 1=A-C$$

$$Para\ x=1\ \rightarrow\ 1=2A\Rightarrow A={}^{1}\!/_{2}\Rightarrow C={}^{-1}\!/_{2}$$

$$Para\ x=-1\ \rightarrow\ 1=2A+2B+1\ \Rightarrow\ B={}^{-1}\!/_{2}$$

Con estos valores,

$$\int\frac{dx}{x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\left(\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}arc\ tg\ x+K$$