INTEGRACIÓN RACIONALES (III)

1. $\int \frac{x-5}{x^3+3x^2-4}dx$ Como en ejercicios anteriores, calculamos primero las raíces del denominador. Es fácil ver que x=1 es una raíz, con lo que si aplicamos ahora Ruffini, tenemos que $x^3+3x^2-4=(x-1)(x^2+4x+4)=(x-1)(x+2)^2$ Nos ha aparecido una raíz doble. En estos casos, la forma de descomponer la fracción algebraica cambia y hay que escribir, para cada raíz múltiple, tantas fracciones simples como nos indique la multiplicidad de la raíz y con todos los exponentes posibles en el denominador entre 1 y la multiplicidad (en este caso 2). En nuestro caso,

	1	3	0	-4
1		1	4	4
	1	4	4	0

$$\frac{x-5}{x^3+3x^2-4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

Desarrollamos la expresión, haciendo común denominador

$$\frac{x-5}{x^3+3x^2-4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}=\frac{A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C}{(x-1)(x+2)^2}$$

Igualamos los numeradores y así: $x-5=A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C$

A partir de aquí, podemos desarrollar y plantear el sistema de ecuaciones como en anteriores ejercicios o resolverlo mediante este otro sistema. Como los dos polinomios deben ser iguales para cualquier valor de “x”, en particular lo serán para $x=1, x=-2$ que son los valores que anulan al denominador y otro valor cualquiera que por ejemplo puede ser $x=0$. No hace falta dar valores muy extraños, cuanto más pequeño mejor. De esta forma,

$$Para\ x=1\rightarrow\ 1-5=A(1+2)^2+B\cdot 0+C\rightarrow -4=9A+C$$

$$Para\ x=-2\rightarrow\ -2-5=A\cdot 0+B\cdot 0+C\Rightarrow\ C=-7\Rightarrow A=\frac{1}{3}$$

Finalmente para $x=0\ \rightarrow 0-5=4A-2B+C\ \Rightarrow B={}^{-1}/_{3}$

Con estos resultados planteamos de nuevo la integral:

$$\int\frac{x-5}{x^3+3x^2-4}dx=\int\frac{{}^{1}/_{3}}{x-1}dx+\int\frac{{}^{-1}/_{3}}{x+2}dx+\int\frac{-7}{(x+2)^2}dx=$$

$$\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{3}\ln(x+2)-\frac{7}{x+2}+K$$