

INTEGRACIÓN RACIONALES (I)

1. $\int \frac{5x^2-19x+2}{x^3-2x^2-5x+6} dx$ Lo primero que vamos a hacer es calcular las raíces del denominador, para ver si podemos resolver la integral como una racional sencilla. Aplicamos la Regla de Ruffini y/o el Teorema del Resto (TR) para hacerlo. Divisores del término independiente son $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ y ± 6 . Aplicando el TR con el primer valor $+1$,

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \Rightarrow Q(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0, \text{ con lo que ya tendremos la}$$

1	1	-2	-5	6	primera raíz (1). Aplicamos la RF para ver cómo se descompone el
		1	-1	-6	polinomio denominador y podemos escribir dicho polinomio así
1	1	-1	-6	0	$Q(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$. Resolviendo $(x^2 - x - 6) = 0$ aplicando
					la fórmula de la ecuación de 2º grado, podemos escribir finalmente que

$$Q(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

De esta forma, puedo escribir

$$\frac{5x^2 - 19x + 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 3}$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 - 19x + 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 3} \\ &= \frac{A(x + 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)} \\ &= \frac{A(x^2 - x - 6) + B(x^2 - 4x + 3) + C(x^2 + x - 2)}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)} \\ &= \frac{x^2(A + B + C) + x(-A - 4B + C) + (-6A + 3B - 2C)}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)} \end{aligned}$$

Igualando ahora los numeradores tendremos

$$5x^2 - 19x + 2 = x^2(A + B + C) + x(-A - 4B + C) + (-6A + 3B - 2C)$$

Y así podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 5 \\ -A - 4B + C &= -19 \\ -6A + 3B - 2C &= 2 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema empleando cualquiera de los métodos que conocemos (p.ej.Gauss)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & 1 & -19 \\ -6 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & -14 \\ 0 & 9 & 4 & 32 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{Obtenemos así}$$

nuestras incógnitas que son $C = -1, B = 4$ y $A = 2$. De esta forma podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 - 19x + 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} &= \frac{2}{x-1} + \frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-3} \Rightarrow \\ \int \frac{5x^2 - 19x + 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} dx &= \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-3} \right) dx = \\ &= \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{4}{x+2} dx - \int \frac{1}{x-3} dx = 2 \ln(x-1) + 4 \ln(x+2) - \ln(x-3) + K \end{aligned}$$