INTEGRACIÓN POR PARTES (II)

Recordemos que $\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} - \int \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{du}$

1. $\int x \cdot lnxdx.$ Aplicaremos $u = \ln x \quad dv = xdx$ de esta manera,

$$du = \frac{dx}{x} \text{ y } v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \cdot lnxdx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + K =$$

$$\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + K = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - x^2) + K$$

2. $\int arc\ sen\ xdx.$ En este caso llamaremos $u = arc\ sen\ x \quad y \quad dv = dx$. De esta forma:

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad y \quad v = x$$

$$\int arc\ sen\ xdx = arc\ senx \cdot x - \int x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ senx \cdot x - \int \frac{2x\ dx}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$arc\ sen\ x \cdot x + \sqrt{1-x^2} + K$$

3. $\int x^2 \cos x\ dx.$ Vamos a llamar $u = x^2$, mientras que $dv = cosx\ dx$. Así,

$du = 2x\ dx$ y $v = sen\ x$

$$\int x^2 \cos x\ dx = x^2 sen\ x - 2\int x\ sen\ x\ dx$$

Una vez aquí, volvemos aplicar partes a la segunda integral, siendo $u = x \quad dv = senx\ dx$ con lo que $du = dx$ y $v = -cosx$

$$\int x\ sen\ x\ dx = -x\ cosx + \int cosx\ dx = -x\ cosx + senx$$

$$\int x^2 \cos x\ dx = x^2 sen\ x - 2(-xcosx + senx) + K = x^2 sen\ x + 2xcosx - 2senx + K$$

4. $\int e^x senx\ dx.$ Observa que esta integral, tomemos como tomemos partes, no se nos va a rebajar la complicación (no vamos a hacer desaparecer ninguna de las funciones). Lo que sucederá es que, tras aplicar partes 2 veces, nos encontraremos de nuevo con la misma integral (salvo constantes), con lo que podremos despejarla. Vayamos paso a paso. Hacemos $u = e^x,\ \ dv = sen\ x\ dx$ con lo que tendremos

$$du = e^x dx \quad y \quad v = -cosx$$

$$\int e^x senx\ dx = -e^x cosx + \int cosx\ e^x dx$$

Volvemos a aplicar de nuevo partes, de la misma forma que antes: $u = e^x,\ \ dv = cos\ x\ dx$

con lo que

$$du = e^x dx \quad y \quad v = sen\, x$$

$$\int e^x senx\, dx = -e^x cosx + \int cosx\, e^x dx = -e^x cosx + e^x sen\, x - \int senx\, e^x dx$$

Podrás comprobar que hemos vuelto a nuestra primera integral, de forma que si llamamos $I = \int e^x senx\, dx$, lo que tendremos es que $I = e^x(-cosx + senx) - I$, despejamos

$$2I = e^x(-cosx + senx) \;\Rightarrow\; I = \frac{e^x}{2}(-cosx + senx) + K$$

$$\int e^x senx\, dx = \frac{e^x}{2}(-cosx + senx) + K$$