INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE (I)

Siempre que una integral la podamos escribir de la siguiente forma:

$$\int f[u(x)]u'(x)dx$$

podremos resolverla por el método llamado de "cambio de variable o sustitución", que consiste en llamar a la función ***u(x)=t*** y, de esa forma, ***u'(x)dx=dt***. Esta sustitución da lugar a una integral de la forma $\int f(t)dt$ que puede ser sencilla de resolver. Luego hay que deshacer el cambio, claro.

Algunos ejemplos:

1. $\int \frac{x^3}{x^4+2}dx$. Vamos a hacer el cambio de variable $(x^4+2)=t$. De esta forma, $dt=4x^3dx$ de donde $x^3dx=\frac{dt}{4}$ y procedemos a sustituir en nuestra integral:

$$\int \frac{x^3}{x^4+2}dx=\int \frac{dt/4}{t}=\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{4}lnt+K=\frac{1}{4}\ln(x^4+2)+K$$

2. $\int \frac{5x^4+6x^2}{\sqrt{x^5+2x^3}}dx$. Hacemos el cambio de variable $x^5+2x^3=t$ y así, $dt=(5x^4+6x^2)dx$

$$\int \frac{5x^4+6x^2}{\sqrt{x^5+2x^3}}dx=\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=\int t^{-1/2}dt=\frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1}+K=\frac{t^{1/2}}{1/2}+K=2\sqrt{t}+K$$

Y deshaciendo el cambio: $\int \frac{5x^4+6x^2}{\sqrt{x^5+2x^3}}dx=2\sqrt{x^5+2x^3}+K$

3. $\int x\,senx^2dx$. Aquí vamos a hacer el cambio $x^2=t \Rightarrow 2xdx=dt$. Con este cambio,

$$\int x\,senx^2dx=\int \frac{1}{2}sen\,t\,dt=\frac{1}{2}\int sen\,t\,dt=-\frac{1}{2}cost+K=-\frac{1}{2}cosx^2+K$$

4. $\int \tan x\,dx=\int \frac{sen\,x}{\cos x}dx$. Aplicamos el cambio de variable $\cos x=t \Rightarrow -sen\,x\,dx=dt$

$$\int \frac{sen\,x}{\cos x}dx=\int \frac{-dt}{t}=-\ln t+K=-\ln cosx+K$$